

optischen Eigenschaften eines vielstufigen elektrostatischen Beschleunigers für relativistische Teilchen leicht überblicken. Sollte die den Gln. (20) zugrunde liegende 1. Näherung nicht ausreichen, lässt sich mit den allgemeinen Ergebnissen des Abschnitts 2 jede beliebige Genauigkeit erreichen, wenn man das Ach-

senpotential des Beschleunigers durch einen hinreichend verfeinerten Polygonzug annähert.

Herrn Prof. Dr. W. BUCKEL danke ich für sein der Arbeit entgegengebrachtes Interesse und für Diskussionen. Fräulein A. GOEBEL danke ich für ihre sehr zuverlässige numerische Auswertung der Ergebnisse.

Die Sättigungsmagnetisierung dünner Schichten

Von W. DÖRING *

Aus dem IBM-Forschungslaboratorium, Adliswil, Zürich
(Z. Naturforsch. **16 a**, 1146–1152 [1961]; eingegangen am 31. Juli 1961)

Nach dem HEISENBERGSchen Modell ergibt sich für eine (100)-Schicht eines einfach-kubischen Gitters in dem Temperaturbereich $T < 0,5 T_c$, in welchem man mit ungestörter Superposition von Spinwellen rechnen darf, nur eine verhältnismäßig geringe Abnahme der Sättigungsmagnetisierung mit abnehmender Schichtdicke, nämlich bei $T=0,5 T_c$ nur ein Absinken um 15% bei Verminderung der Schichtdicke auf 10 Atomlagen und bei tieferen Temperaturen noch weniger.

Eine Berechnung der Abhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung dünner Schichten von der Schichtdicke wurde von KLEIN und SMITH¹ für ein einfach-kubisches Gitter mit einer (001)-Ebene parallel zur Schicht durchgeführt. GLASS und KLEIN² erweiterten die Rechnung auf andere Gittertypen und andere Lagen der Schicht im Gitter. In dieser Theorie wird, ebenso wie in der BLOCHSchen Theorie, welche zum $T^{1/2}$ -Gesetz führt, das HEISENBERGSche Modell lokalisierter S-Elektronen verwendet.

Die Energie der tiefsten Zustände wird als Summe der Energien $\varepsilon(\mathbf{f})$ unabhängiger Spinwellen geschrieben. $\varepsilon(\mathbf{f})$ wird nach den Komponenten k_x und k_y des Ausbreitungsvektors \mathbf{f} parallel zur Schichtebene entwickelt, und davon wird nur der erste Summand proportional $k_x^2 + k_y^2$ berücksichtigt. Das ist sicher nur bei Temperaturen weit unterhalb des CURIE-Punktes zulässig. Dadurch wird der Vergleich der Ergebnisse mit dem Experiment sehr erschwert, denn Messungen wurden bisher nur bei Zimmertemperatur durchgeführt, und diese liegt bei den untersuchten Substanzen außerhalb des Gültigkeitsbereiches des $T^{1/2}$ -Gesetzes.

Um einen solchen Vergleich trotzdem zu ermöglichen, haben DRIGO³ einerseits und CRITTENDEN und HOFFMANN⁴ andererseits Verfahren zur Extrapolation der theoretischen Ergebnisse unter Benutzung

der gemessenen Werte für die Sättigungsmagnetisierung am kompakten Material angegeben. Stichhaltige Begründungen für die Richtigkeit dieser Verfahren gibt es bisher nicht. Es besteht im Gegenteil Grund zur Annahme, daß dadurch eine zu starke Abhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung von der Schichtdicke vorgetäuscht wird. Denn aus einer Rechnung von VALENTE⁵, in welcher die Austauschwechselwirkung durch ein vom Abstand von der Oberfläche abhängiges WEISSsches Feld ersetzt wird, ergibt sich ein merkliches Absinken der Sättigungsmagnetisierung unter den Wert des kompakten Materials erst bei viel geringeren Schichtdicken als nach der von CRITTENDEN und HOFFMANN modifizierten Theorie von KLEIN und SMITH. Da die WEISSsche Theorie für eine Wechselwirkung mit sehr vielen Nachbaratomen richtige Ergebnisse liefert, ist es unwahrscheinlich, daß sie für eine dünne Schicht zu qualitativ anderen Ergebnissen führt als die Spinwellentheorie.

Deshalb wurde hier versucht, die Theorie von KLEIN und SMITH auf höhere Temperaturbereiche zu erweitern. Das ist ohne Schwierigkeit möglich, weil nach DYSON⁶ die Wechselwirkung zwischen den Spinwellen erst bei ziemlich hohen Temperaturen eine Rolle spielt. Wenn man die Sättigungsmagnetisierung nach Potenzen von T entwickelt, hängen die

¹ M. J. KLEIN u. R. S. SMITH, Phys. Rev. **81**, 378 [1951].

² S. J. GLASS u. M. J. KLEIN, Phys. Rev. **109**, 288 [1958].

³ A. DRIGO, Nuovo Cim. **8**, 498 [1951].

⁴ E. C. CRITTENDEN u. R. W. HOFFMANN, Rev. Mod. Phys. **25**, 310 [1953].

⁵ L. VALENTE, Czech. J. Phys. **7**, 127 [1957].

⁶ F. J. DYSON, Phys. Rev. **102**, 1217 [1956].



ersten 3 Glieder (außer der Konstanten) nur von dem Anfang der Reihenentwicklung der Energie $\varepsilon(\mathbf{f})$ einer Spinwelle nach den Komponenten von \mathbf{f} ab, und zwar gehen dabei die Glieder bis einschließlich 6. Grades in die Rechnung ein. Die Wechselwirkung beeinflußt nur die Glieder mit höheren Potenzen von T , die sich erst bei Temperaturen oberhalb der halben CURIE-Temperatur stark bemerkbar machen. So weit kann also die Berechnung auch für dünne Schichten leicht durchgeführt werden.

Im folgenden ist zugleich ein kleiner Fehler von KLEIN und SMITH korrigiert worden. KNAPPWOST und RUST⁷ sowie HOFFMANN⁸ wiesen bereits darauf hin, daß in dieser Arbeit die Randbedingung der Spinwellen an der Oberfläche nicht richtig berücksichtigt worden ist. Es wurde einfach Periodizität der Spinwelle in Richtung senkrecht zur Schicht mit der Schichtdicke als Periodenlänge angenommen. Hier wird gezeigt werden, daß die Blochsche Differenzengleichung bei einem einfach-kubischen Gitter und einer Schicht parallel zur (001)-Ebene für eine Austauschwechselwirkung nur zwischen Nachbaratomen exakt befriedigt wird, wenn man die makroskopische Randbedingung des Verschwindens der Ableitung der Magnetisierungskomponenten in Normalenrichtung auf die quantenmechanische Zustandsfunktion sinngemäß überträgt. Solange man den Einfluß einer Oberflächenanisotropie außer Betracht lassen kann, treten in diesem Falle kein Oberflächenwellen auf. In den folgenden Berechnungen wird ein äußeres Feld vorausgesetzt, welches einen Ersatz für die stets vorhandene Anisotropie der Magnetisierungsarbeit darstellen soll, weil nach den Ausführungen einer früheren Arbeit⁹ bei völligem Fehlen jedes äußeren Feldes und jeder Anisotropie die Magnetisierung jeder Schicht endlicher Dicke infolge der superparamagnetischen Schwankungen der Winkel zwischen den Magnetisierungsrichtungen der einzelnen Teile der Schicht von der Größe der Probe abhängig ist. Ein äußeres Feld hat dieselbe Wirkung wie eine uniaxiale Anisotropie mit einer in der ganzen Probe gleichen Richtung der Vorzugslage im remanent magnetisierten Zustand und hat zugleich die angenehme Eigenschaft, daß es das Vorkommen des entgegengesetzten magnetisierten Zustandes bei genügend großen Proben im thermodynamischen Gleichgewicht theoretisch streng ausschließt, was bei

einer in Wirklichkeit vorhandenen uniaxialen Anisotropie nur praktisch ausgeschlossen ist, weil das Umspringen der Magnetisierung in der ganzen Probe aus einer Vorzugslage in die entgegengesetzte ein extrem seltes Ereignis ist.

Im übrigen wird im folgenden der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung und der magnetischen Spin-Wechselwirkung (Quasi-Dipol-Dipol-Wechselwirkung), also auch der Einfluß der Kristallenergie und die Abhängigkeit der Energie der Spinwellen von dem Winkel zwischen Ausbreitungsvektor und mittlerer Magnetisierungsrichtung vernachlässigt. Diese Effekte haben unter den üblichen Bedingungen nur einen sehr geringen oder einen nur bei sehr tiefen Temperaturen bemerkbaren Einfluß auf die Sättigungsmagnetisierung¹⁰.

I. Die Randbedingung der Spinwelle

Im folgenden wird eine Schicht eines einfach-kubischen Gitters parallel zur (001)-Ebene mit einer Dicke von D Atomlagen betrachtet. In x - und y -Richtung parallel zur Schicht setzen wir Periodizität mit einer gegen die Schichtdicke sehr großen Periodenlänge von G Gitterkonstanten voraus. Die Lage jedes Atoms kann dann durch einen Vektor \mathbf{l} mit ganzzähligen Komponenten (l_x, l_y, l_z) gekennzeichnet werden ($l_z = 1, 2, \dots, D$). Der HAMILTON-Operator für das HEISENBERGSche Modell in der Form von DIRAC lautet dann

$$\mathcal{H} = 2J \sum_{\text{Nachbarnpaare}} (S^2 - \mathfrak{S}_l \cdot \mathfrak{S}_m) + 2\mu H \sum_l (S - S_l^{(H)}). \quad (1)$$

Darin bedeutet \mathfrak{S}_l den Operator zum Vektor vom Betrag $S = \frac{1}{2}$ in Richtung des Spins beim Atom l . In der ersten Summe steht das skalare Produkt dieser Operatoren zu benachbarten Atomen l und m . $S_l^{(H)}$ ist die Komponente dieses Vektoroperators in Richtung des Feldes H . Der Nullpunkt der Energie wurde gleich dem Eigenwert des Zustands ψ_0 gesetzt, in welchem alle Spins in Feldrichtung stehen. Wir betrachten hier nur den Fall $S = \frac{1}{2}$. Ist ψ_m der Zustand, bei dem alle Spins in Feldrichtung stehen (+-Spins), nur derjenige beim Atom m in Gegenrichtung (-Spins), so hat der allgemeinste Zustand mit einem Minusspin die Form

$$\psi = \sum_m a_m \psi_m. \quad (2)$$

⁷ A. KNAPPWOST u. G. RUST, Z. phys. Chem., N. F. **21**, 163 [1959].

⁸ H. HOFFMANN, Z. angew. Phys. **13**, 149 [1961].

⁹ W. DÖRING, Z. Naturforsch. **16a**, 1008 [1961].

¹⁰ Vgl. T. HOLSTEIN u. H. PRIMAKOFF, Phys. Rev. **58**, 1098 [1940].

Die Forderung, daß ψ Eigenfunktion von \mathcal{H} mit dem Eigenwert ε ist, führt nach BLOCH¹¹ auf die Differenzengleichung

$$(\varepsilon - 2 \mu H) a_l = J \sum_m (a_l - a_m). \quad (3)$$

Dabei ist rechts m über alle Nachbarn von l zu summieren. Weist l zu einem Atom im Innern der Schicht, so durchläuft m 6 Werte, für Oberflächenatome dagegen nur 5. Für alle Atome im Innern ist Gl. (3) zu befriedigen durch

$$a_l = C e^{i k_l l} \quad (4)$$

und

$$\varepsilon = 2 \mu H + 2 J (3 - \cos k_x - \cos k_y - \cos k_z). \quad (5)$$

Da (3) linear ist, wird es außer durch (4) auch durch jede Linearkombination von Lösungen der Form (4) mit gleichem ε befriedigt. Die Randbedingungen für $l_z=1$ und $l_z=D$ können nun durch den Ansatz

$$a_l = e^{i(k_x l_x + k_y l_y)} (C_1 e^{i k_z l_z} + C_2 e^{-i k_z l_z}) \quad (6)$$

befriedigt werden. Beim Einsetzen in (3) und Beachtung von (5) zeigt sich, daß diese Gleichung auch für alle Oberflächenatome erfüllt ist, wenn gilt

$$C_2/C_1 = e^{i k_z} = e^{i k_z (2D+1)}, \quad (7)$$

also $k_z = \frac{\pi}{D} n_z$ (n_z ganz). (7 a)

Das bedeutet, die Ableitung von a_l nach der Komponente l_z muß auf den Flächen $l_z=1/2$ und $l_z=D+1/2$ verschwinden. Wenn man sich die Atome als Würfel der Kantenlänge $\Delta l_z=1$ vorstellt, sind das gerade die Oberflächen der Schicht. Diese Bedingung hat zur Folge, daß a_l in Richtung senkrecht zur Schicht periodisch wird mit einer Periodenlänge gleich der doppelten Schichtdicke. KLEIN und SMITH setzten die Periodenlänge gleich der Schichtdicke. Wegen (7) lautet (6)

$$a_l = C e^{i(k_x l_x + k_y l_y)} \cos k_z (l_z - \frac{1}{2}). \quad (8)$$

Da ein Vorzeichenwechsel von k_z die Lösung unverändert läßt, erhält man linear unabhängige Lösungen nur für $n_z=0, 1, 2, \dots$ bis $(D-1)$. Die Periodizitätsforderung in x - und y -Richtung liefert

$$k_x = \frac{2\pi}{G} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{G} n_y. \quad (9)$$

Darin kann n_x und n_y die ganzzahligen Werte $(-\frac{1}{2}G+1), \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{1}{2}G$ annehmen. Zusammen sind das gerade $G^2 D$ verschiedene f-Vek-

toren, also genausoviel wie Atome. Man erhält also gerade die richtige Anzahl von linear unabhängigen Lösungen für einen Linksspin. Weitere Lösungen, welche in Gestalt von Oberflächenwellen vermutet werden könnten, gibt es in dem betrachteten Falle nicht. Sie treten jedoch mit fortschreitenden oder stehenden Wellen gekoppelt auf, wenn die Oberfläche keine so einfache kristallographische Orientierung besitzt.

II. Berechnung der Magnetisierung

In dem Temperaturbereich, in welchem man die Spinwellen einfach superponieren darf, erhält man nun für die Komponente m des magnetischen Moments in Feldrichtung dividiert durch den Maximalwert $N \mu$

$$\frac{m}{N \mu} = 1 - \frac{2}{N} \cdot \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{\exp[\gamma + (2/\Theta) (3 - \cos k_x - \cos k_y - \cos k_z)] - 1}. \quad (10)$$

Darin wurde zur Abkürzung

$$2 \mu H/k T = \gamma \quad \text{und} \quad k T/J = \Theta \quad (11)$$

gesetzt. Da in dem betrachteten Temperaturbereich $e^{2/\Theta} \gg 1$ ist, kann man ohne wesentlichen Fehler in den folgenden Näherungsformeln für $|k_j| \ll 1$ n_x und n_y von $-\infty$ bis $+\infty$ summieren und n_z von 0 bis ∞ . Mit den Abkürzungen

$$2\pi/G\sqrt{\Theta} = \alpha \quad \text{und} \quad \pi/D\sqrt{\Theta} = \beta \quad (12)$$

lautet der Anfang der Potenzreihenentwicklung der eckigen Klammer in (10)

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{2}{\Theta} (3 - \cos k_x - \cos k_y - \cos k_z) \\ = \gamma + \alpha^2 (n_x^2 + n_y^2) - \frac{\Theta}{12} (\alpha^4 n_x^4 + \alpha^4 n_y^4 + \beta^4 n_z^4) \\ + \frac{\Theta^2}{360} (\alpha^6 n_x^6 + \alpha^6 n_y^6 + \beta^6 n_z^6) - \dots . \end{aligned} \quad (13)$$

Da zur Summe nur diejenigen Glieder wesentlich beitragen, bei denen $|\alpha n_x|$, $|\alpha n_y|$ und βn_z von der Größenordnung 1 oder kleiner sind, kann man die Glieder mit Θ und Θ^2 im Bereich $\Theta \ll 1$ als Korrekturen behandeln. Die Entwicklung nach Θ liefert dann

$$\frac{m}{N \mu} = 1 - \frac{\Theta^{3/2}}{2 \pi^3} (S_1 + \Theta S_2 + \Theta^2 S_3 + \dots) . \quad (14)$$

¹¹ F. BLOCH, Z. Phys. **61**, 206 [1930]; vgl. A. SOMMERFELD u. H. A. BETHE, Handbuch der Physik, Bd. 33, 2. Aufl. [1933].

Darin ist

$$S_1 = \sum_{n_z=0}^{+\infty} \sum_{n_x, n_y=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \beta}{E-1},$$

$$E = \exp[\gamma + \alpha^2 n_x^2 + \alpha^2 n_y^2 + \beta^2 n_z^2], \quad (15 \text{ a})$$

$$S_2 = \sum_{n_z=0}^{+\infty} \sum_{n_x, n_y=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \beta E}{(E-1)^2} \frac{\alpha^4 (n_x^4 + n_y^4) + \beta^4 n_z^4}{12}, \quad (15 \text{ b})$$

$$S_3 = \sum_{n_z=0}^{+\infty} \sum_{n_x, n_y=-\infty}^{+\infty} \alpha^2 \beta$$

$$\cdot \left\{ \frac{E^2}{(E-1)^3} \frac{(\alpha^4 n_x^4 + \alpha^4 n_y^4 + \beta^4 n_z^4)^2}{144} \right. \quad (15 \text{ c})$$

$$- \frac{E}{(E-1)^2} \left(\frac{\alpha^6 (n_x^6 + n_y^6) + \beta^6 n_z^6}{360} \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(\alpha^4 n_x^4 + \alpha^4 n_y^4 + \beta^4 n_z^4)^2}{288} \right) \right\}.$$

Da bei genügend großem Periodizitätsintervall G stets $\alpha^2 \ll \gamma \ll 1$ ist, kann man die Summen über n_x und n_y durch Integrale ersetzen. Für $n_z=0$ sind diese bis auf den Faktor β mit den entsprechenden Integralen für das quadratische Flächengitter identisch. Sie haben für $\gamma=0$ eine logarithmische Singularität und sind in einer früheren Arbeit⁹ berechnet worden. Die anderen sind bei $\gamma=0$ regulär und lassen sich nach Potenzen von γ entwickeln. Das liefert

$$S_1 = -\pi \beta \ln(1 - e^{-\gamma}) + \Sigma_{10} - \gamma \Sigma_{11} + \frac{\gamma^2}{2} \Sigma_{12} - \dots \quad (16)$$

mit $\Sigma_{10} = -\pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-\beta^2 n^2}), \quad (16 \text{ a})$

$$\Sigma_{11} = \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta^2 n^2} - 1}, \quad (16 \text{ b})$$

$$\Sigma_{12} = \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\beta^2 n^2}}{(e^{\beta^2 n^2} - 1)^2}. \quad (16 \text{ c})$$

$$S_2 = \beta \left(\frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi \gamma}{8} \ln \gamma - \frac{\pi \gamma}{8} + \dots \right) \quad (17)$$

$$+ \Sigma_{20} - \gamma \Sigma_{21} + \dots$$

mit $\Sigma_{20} = \frac{\pi \beta}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta^4 n^4}{e^{\beta^2 n^2} - 1} + \frac{3}{2} \int_{t=0}^{\infty} \frac{t dt}{e^{\beta^2 n^2} + t - 1} \right), \quad (17 \text{ a})$

$$\Sigma_{21} = \frac{\pi \beta}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^4 n^4}{4 \sinh \frac{\beta^2 n^2}{2}} + \frac{1}{8} \Sigma_{10}. \quad (17 \text{ b})$$

$$S_3 = \frac{5}{128} \pi \beta \left(\zeta(3) - \frac{\pi^2}{6} \gamma - \frac{\gamma^2}{2} \ln \gamma + \dots \right) + \Sigma_{30} - \dots \quad (18)$$

mit

$$\Sigma_{30} = \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta^8 n^8}{288} \frac{e^{\beta^2 n^2}}{(e^{\beta^2 n^2} - 1)^2} \right. \\ - \frac{\beta^6 n^6}{360} \frac{1}{e^{\beta^2 n^2} - 1} - \frac{\beta^4 n^4}{96} \ln(1 - e^{-\beta^2 n^2}) \\ \left. + \frac{5}{256} \int_{t=0}^{\infty} \frac{t^2 dt}{e^{\beta^2 n^2} + t - 1} \right\}. \quad (18 \text{ a})$$

Die hier auftretenden Summen lassen sich für $\beta > 2$ leicht berechnen, weil dann der zweite Summand schon klein gegen den ersten ist und daher als kleine Korrektur behandelt werden kann. Für kleine β kann man die Euler-Maclaurinsche Summenformel verwenden. Dabei wurde auf die Abschätzung des Restgliedes in der Regel verzichtet. Es wurden vielmehr einfach die ersten 3 Glieder der Reihe berechnet. Die Brauchbarkeit der erhaltenen Näherungsformeln wurde geprüft durch Vergleich mit dem Resultat einer numerischen Berechnung der Summen für einige Werte von β zwischen 0, 1 und 2 mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine. Dabei zeigte sich, daß diese Näherungsformeln in allen Fällen bis $\beta \approx 0,7$ nur Fehler unter 1% lieferten. Für $\beta < 0,1$ verursacht das Abbrechen der numerischen Summation nach 50 Gliedern und die Verwendung von 3-gliedrigen algebraischen Näherungsformeln für den Logarithmus in Σ_{10} größere Fehler als die Verwendung der Näherungsformeln (23) bis (27).

Bei den Summen Σ_{11} und Σ_{12} spaltet man vor Anwendung der Euler-Maclaurinschen Summenformel die bekannten Summen für $\zeta(2)$ und $\zeta(4)$ ab. Das liefert z. B.

$$\Sigma_{11} = \pi \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\beta^2 n^2} - 1} - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) + \frac{\pi^3}{6 \beta}. \quad (19)$$

Die Summe hat jetzt die Form $\beta \sum_{n=1}^{\infty} f(\beta n)$ mit einer Funktion $f(z)$, welche in z gerade und bei $z=0$ regulär ist. Die Anwendung der Euler-Maclaurinschen Formel von $n=0$ an liefert dann die abbrechende Reihe

$$\beta \sum_{n=1}^{\infty} f(\beta n) = \int_{z=0}^{\infty} f(z) dz - \frac{\beta}{2} f(0). \quad (20)$$

Nach dieser Formel lassen sich auch die ersten Teilsummen von Σ_{20} , Σ_{21} und Σ_{30} leicht auswerten.

Die dabei auftretenden Integrale lassen sich bei geeigneter Deformation des Integrationsweges in der komplexen z -Ebene auf das Integral der ζ -Funktion zurückführen. Σ_{10} und die Summen über die Integrale bei Σ_{20} und Σ_{30} machen etwas mehr Mühe. Bei Σ_{10} wurde die EULER-MACLAURINSche Formel erst vom p -ten Summanden an verwendet. Wenn $p \gg 1$, aber $\beta p \ll 1$ ist, kann man dann $\ln(1 - e^{-\beta^2 n^2})$ bei den ersten p Summanden nach βn entwickeln. Das führt bei den ersten Gliedern auf eine Summe über $\ln n$ und die Quadratzahlen. Von diesen wurde die erste mit Hilfe der STIRLINGschen Formel berechnet. Beim Einsetzen stellt sich heraus, daß die Glieder mit positiven Potenzen von p von dem ersten Teil der Summe sich gegen entsprechende Glieder der EULER-MACLAURINSchen Summenformel für den Rest wegheben. Wenn man nachher $p \rightarrow \infty$ gehen läßt, erhält man das von p unabhängige Resultat

$$\Sigma_{10} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{2} \zeta(3/2) - \pi \beta \ln 2 \pi / \beta. \quad (21)$$

Bei Σ_{20} bewirkt das Integral, daß in der EULER-MACLAURINSchen Summenformel schon vom dritten Glied an alle Terme die gleiche Potenz von β enthalten. Die Reihe divergiert also auch für kleine β . Deshalb wurde in diesem Falle eine Restgliedabschätzung vorgenommen mit dem Resultat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \beta}{8} \int_{t=0}^{\infty} \frac{t dt}{e^{\beta^2 n^2 + t} - 1} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{16} \zeta(5/2) - \frac{\pi^3}{96} \beta + R_3 + O(\beta^5), \quad (22)$$

$$|R_3| \leq \frac{\pi \sqrt{3}}{432} \beta^3 |(1 + \sqrt{3} - \ln \beta)|.$$

Wenn also Summanden der Größenordnung β^3 vernachlässigt werden können, liefern die ersten bei-

den Glieder der Summenformel in diesem Fall ein brauchbares Resultat. Dasselbe gilt für Σ_{20} .

Als Endresultat erhält man bei Streichung aller Summanden proportional β^3 die folgenden Näherungsformeln:

$$\Sigma_{11} = \frac{\pi^3}{6 \beta} + \frac{\sqrt{\pi^3}}{2} \zeta(1/2) + \frac{\pi \beta}{4}, \quad (23)$$

$$\Sigma_{12} = \frac{\pi^5}{90 \beta^3} + \frac{\sqrt{\pi^3}}{2} \zeta(-1/2) + \frac{\pi \beta}{24}, \quad (24)$$

$$\Sigma_{20} = \frac{3 \sqrt{\pi^3}}{32} \zeta(5/2) - \frac{\pi^3}{96} \beta, \quad (25)$$

$$\Sigma_{21} = \frac{3 \sqrt{\pi^3}}{32} \zeta(3/2) - \frac{\pi \beta}{8} \ln 2 \pi / \beta - \frac{\pi \beta}{24}, \quad (26)$$

$$\Sigma_{30} = \frac{33 \sqrt{\pi^3}}{1024} \zeta(7/2) - \frac{5}{256} \pi \beta \zeta(3). \quad (27)$$

Wie man an den Ausdrücken für Σ_{10} , Σ_{11} und Σ_{12} erkennt, erhält man auf diese Weise für S_1 eine Reihe, die nicht nach Potenzen von γ , sondern nach Potenzen von γ/β^2 fortschreitet. Das ist auch bei S_2 und S_3 der Fall, nur treten dort die Glieder mit negativen Potenzen von β erstmalig bei Termen mit höheren Potenzen von γ auf, welche hier nicht mehr berücksichtigt wurden. γ/β^2 ist unabängig von der Temperatur gleich $2 \mu H D^2 / \pi^2 J$. Für sehr dicke Schichten und hohes Anisotropiefeld sind also die obigen, für kleine β entwickelten Näherungsformeln unbrauchbar. Setzt man $\mu = 1$ BOHRsches Magneton und für J denjenigen Wert, der beim einfach-kubischen Gitter einen CURIE-Punkt von $600^\circ K$ liefern würde, so zeigt sich, daß die Ergebnisse noch für $D = 100$ und $H = 1000$ Oe oder $D = 1000$ und $H = 10$ Oe gut brauchbar sind.

Beim Einsetzen von (21) bis (27) in (16) bis (18) erhält man aus (14) die folgende, für kleine β , also für ziemlich dicke Schichten mit nicht allzu großen Anisotropiefeldern H gültige Näherungsformel

$$\begin{aligned} \frac{m}{N \mu} &= 1 - \frac{\Theta^{1/2}}{4 \sqrt{\pi^3}} \left\{ \zeta(3/2) - \gamma \zeta(1/2) + \frac{\gamma^2}{2} \zeta(-1/2) - \dots + \frac{3 \Theta}{16} \left(\zeta(5/2) - \gamma \zeta(3/2) + \frac{\gamma^2}{2} \zeta(1/2) - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{33}{512} \Theta^2 \left(\zeta(7/2) - \gamma \zeta(5/2) + \frac{\gamma^2}{2} \zeta(3/2) - \dots \right) + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{\Theta}{2 \pi D} \left\{ -\ln 2 \gamma D \sqrt{\Theta} - \frac{\gamma}{\beta^2} \zeta(2) + \frac{\gamma^2}{2 \beta^4} \zeta(4) - \dots + \frac{\gamma}{4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Theta}{16} \left(\zeta(2) + 2 \gamma (\ln 2 \gamma D \sqrt{\Theta} - 2/3) - \frac{\gamma^2}{40} + \dots \right) + \frac{5 \Theta^2}{256} (\zeta(3) - \gamma \zeta(2) + \dots) + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{\Theta}{2 \pi D^3} O(1) - \dots . \end{aligned} \quad (28)$$

Streicht man in diesem Ausdruck alle Glieder proportional $1/D$ und setzt dann $\gamma = 0$, so erhält man, wie zu erwarten, die ersten Glieder der Formel von Dyson für das einfache-kubische Gitter, natürlich ohne das Glied proportional Θ^4 , welches bei Dyson von der hier vernachlässigten Wechselwirkung der Spinwellen herrührt.

III. Diskussion der Ergebnisse

In Abb. 1 ist die Größe $m/N\mu$ für einige Werte von D in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Dabei wurde $\gamma = 4 \cdot 10^{-6}/\Theta$ gesetzt. Das entspricht einem Anisotropiefeld $H = 10$ Oe, wenn man $\mu = 1$ BOHRSCHE Magneton setzt und für J einen solchen Wert, daß der CURIE-Punkt des unendlich ausgedehnten einfach-kubischen Gitters und $S = 1/2$ den gleichen Wert wie für Nickel hat, $T_c = 631^\circ\text{K}$. Für kleine β , also dicke Schichten und hohe Temperaturen, wurden die Kurven in Abb. 1 nach (28) berechnet, für mittlere und große β unmittelbar aus (14) und (16) bis (18) unter Benutzung der mit der Rechenmaschine ermittelten Werte der Summen Σ_{ik} . Die Abszisse in Abb. 1 ist T/T_c , nicht Θ . Der CURIE-Punkt T_c des kompakten Materials ist nach RUSHBROOKE und WOOD¹² in dem betrachteten Fall mit dem Austauschintegral J verknüpft durch

$$k T_c = 1,89 \Theta.$$

Die oberste Kurve in Abb. 1 stellt das BLOCHSche $T^{3/2}$ -Gesetz dar. Die mit $D = \infty$ bezeichnete Kurve entspricht der Formel von Dyson ohne das Wechselwirkungsglied bzw. Formel (28) für $D = \infty$. Es ist dabei praktisch gleichgültig, ob man für γ den obigen Wert benutzt oder $\gamma = 0$ setzt. Man sieht, daß bis $T = 0,6 T_c$ die höheren Glieder von DYSON nur geringen Einfluß haben. Die Kurve für $D = 1$ entspricht der in der vorhergehenden Arbeit⁹ angegebenen Formel. Ihr Verlauf ist von γ merklich, wenn auch nicht sehr stark abhängig.

Man erkennt an Abb. 1 bereits, daß die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Schichtdicke wesentlich geringer ist als nach der von CRITTENDEN und HOFFMANN extrapolierten Kurve von KLEIN und SMITH. Noch deutlicher zeigt das Abb. 2, in der das Verhältnis von m zu dem Wert für das kompakte Material bzw. $D = \infty$ bei der konstanten Temperatur $T = 0,5 T_c$ in Abhängigkeit von der Schichtdicke D aufgetragen ist. Erst unterhalb $D = 10$ sinkt dieses Verhältnis unter 0,85. Wenn man dieses Resultat ohne Beachtung des unterschiedlichen Gittertypus auf Nickel anwendet und dabei die Gitterkonstante des hier betrachteten einfach-kubischen Gitters mit dem Abstand benachbarter Atome in Nickel identifiziert, heißt das, daß die Sättigungsmagnetisierung bei Zimmertemperatur erst bei einer Schichtdicke von etwa 20 Å um 15% kleiner sein sollte als am kompakten Material. Die Messungen an Nickelschich-

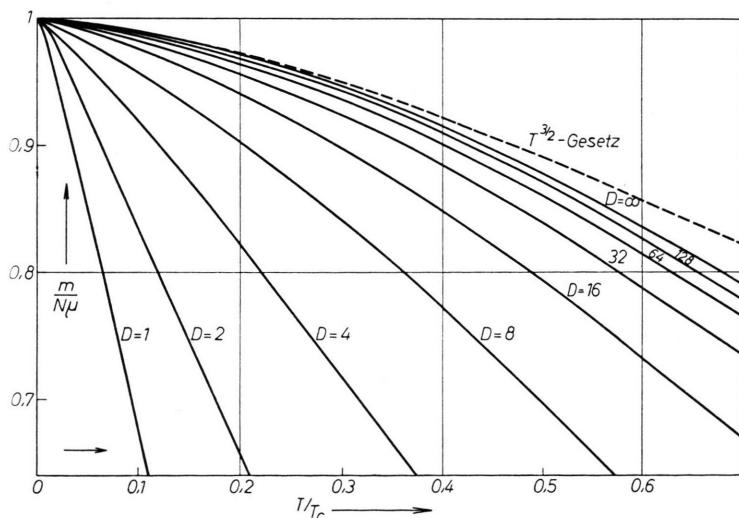


Abb. 1. Die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur für verschiedene Schichtdicken.

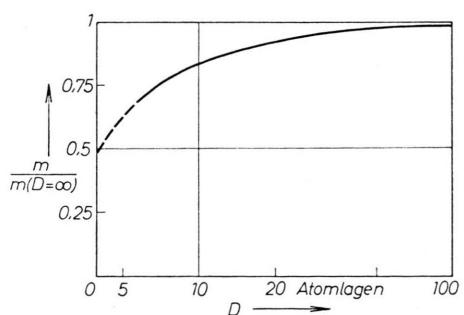


Abb. 2. Die Abhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung im Verhältnis zur Sättigungsmagnetisierung des kompakten Materials in Abhängigkeit von der Schichtdicke D für die feste Temperatur $T = 0,5 T_c$.

¹² G. S. RUSHBROOKE u. P. J. WOOD, Mol. Phys. 1, 257 [1958].

ten, welche in normalem Vakuum aufgedampft wurden, zeigen schon von etwa 200 Å Dicke an eine Veränderung der Sättigungsmagnetisierung um 15% und mehr. Die Messungen von NEUGEBAUER¹³ und HOFFMANN⁸ an Schichten im Ultrahochvakuum dagegen zeigen eine noch etwas schwächere Abhängigkeit von der Schichtdicke als diese Theorie. Qualitativ stimmt das Resultat mit demjenigen von VALENTA (s. Anm. 5) überein. Ein genauerer Vergleich zwischen dem Experiment und den verschiedenen Theorien ist erst sinnvoll, wenn die gleichen Gittertypen

¹³ C. A. NEUGEBAUER, Phys. Rev. **116**, 1441 [1959]; J. Appl. Phys., Suppl. **31**, 152 [1960].

und mehrere Lagen der Schicht im Gitter betrachtet worden sind. Die Ergebnisse bestätigen jedoch die Vermutung, daß die früher aus der Theorie entnommene starke Abhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung von der Schichtdicke durch das Extrapolationsverfahren von CRITTENDEN und HOFFMANN vorgetauscht worden ist und kein korrektes Resultat der Spinwellentheorie ist.

Herrn Dr. GUTZWILLER und Herrn Dr. THOMAS habe ich für zahlreiche anregende Diskussionen zu danken. Herrn DRANGEID danke ich für Hilfe bei der Vorbereitung der numerischen Berechnungen, Herrn MÜNGER für die Programmierung und Überwachung der Rechnungen an der elektronischen Rechenmaschine.

Zum Einfluß von Inhomogenitäten mit Schichtstruktur auf die galvanomagnetischen Effekte

Von G. BOGNER UND H. RUPPRECHT

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen
(Z. Naturforschg. **16 a**, 1152–1161 [1961]; eingegangen am 21. Juli 1961)

Es wird gezeigt, daß durch eine Überstruktur der Störstellenverteilung in Form von Schichten die galvanomagnetischen Effekte in empfindlicher Weise gestört werden können. Dies kann sich in einer ausgeprägten Anisotropie der Widerstandsänderung äußern, welche durch die Überlagerung einer hohen geometrieverbedingten Widerstandsänderung hervorgerufen wird. Aus der Abhängigkeit dieser geometrischen Widerstandsänderung vom Winkel zwischen Magnetfeld und Probenlängsachse läßt sich auf die Lage der Schichtstruktur relativ zum Probensystem schließen. Man erhält den unverfälschten Wert der physikalischen Widerstandsänderung nur dann, wenn die Normale der Schichtstruktur senkrecht auf der Probenlängsachse steht. Im Gegensatz zur Widerstandsänderung erweist sich der in *B* lineare HALL-Effekt unabhängig von der relativen Lage der Schichtstruktur. Man mißt stets den gleichen Mittelwert des HALL-Koeffizienten.

Bei der Messung des planaren HALL-Effektes macht sich die Überstruktur der Störstellenverteilung wiederum störend bemerkbar. Für die Extremlagen, Schichtnormale parallel und senkrecht zur Probenlängsachse, findet man den wahren planaren HALL-Effekt. Jedoch bereits kleine Abweichungen von diesen beiden Idealfällen (10° – 15°) führen zu einer starken Verfälschung der Winkelabhängigkeit. Da diese Extremfälle experimentell nur schwer zu realisieren sind, kann der Bestimmung der Widerstandsänderung aus Messungen des planaren HALL-Effektes, wie sie in einer früheren Arbeit² vorgenommen wurde, nur qualitative Bedeutung zukommen. Unter den dort gemachten Einschränkungen aber stellt die Messung des planaren HALL-Effekts zweifelsohne ein weiteres Hilfsmittel dar, eine Entscheidung über die Größenordnung der wahren Widerstandsänderung zu treffen.

Bei Halbleitern mit hoher Trägerbeweglichkeit μ und kleiner physikalischer Widerstandsänderung $\Delta R/R_0$ können Inhomogenitäten in der Störstellenverteilung zu Widerstandsänderungen im Magnetfeld führen, welche um Größenordnungen über der wahren physikalischen Widerstandsänderung liegen. Die Erhöhung des Widerstandes beruht auf einer Stromverdrängung durch das Magnetfeld. Dieser Effekt tritt bei n-leitendem InSb infolge der extrem hohen Elektronenbeweglichkeit bereits bei verhält-

nismäßig geringen Konzentrationsschwankungen auf. Falls die Verteilung der Inhomogenitäten unbekannt ist, läßt sich über die Stromverdrängung keine Vorhersage machen. Für den Fall einer Schichtstruktur der Inhomogenitäten jedoch wurde das Problem der Widerstandserhöhung im Magnetfeld theoretisch von HERRING¹ gelöst. Die in früheren Arbeiten^{2, 3} gefundenen experimentellen Ergebnisse für die Widerstandsänderung an n-leitendem InSb stehen in gutem Übereinklang mit den Resultaten von HERRING, wenn

¹ C. HERRING, J. Appl. Phys. **31**, 1938 [1960].

² H. RUPPRECHT, R. WEBER u. H. WEISS, Z. Naturforschg. **15 a**,

³ 783 [1960].